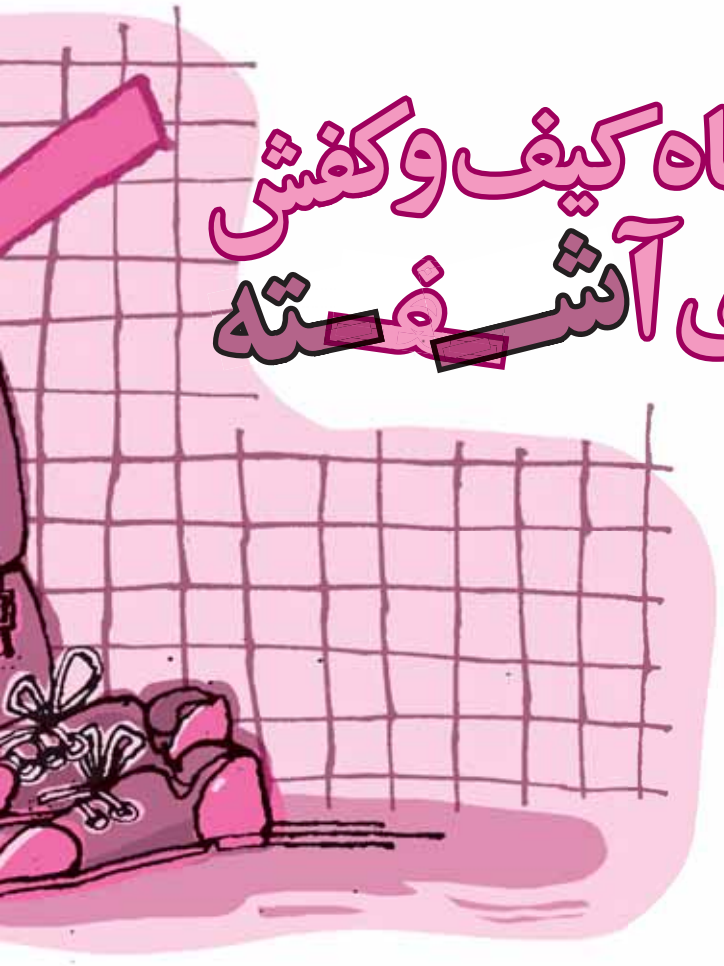
مسئلهٔ کارگاه کیف و کفش و آقای آشفته

حسین نامی‌ساعی



چند وقتی است که فکر پدرم حسابی مشغول است. او از تولیدکنندگان قدیمی و باسابقهٔ کیف و کفش مدرسه است. پدرم می‌گوید به‌تازگی در تولید کیف و کفش به مشکلی برخورده است. مشکلش این است که در چند سال اخیر، تولید کفش با توجه به قیمت‌های بازار برایش ضرر دارد و تولید کیف هم تقریباً برایش سودآور است.

اما مسئله این است که هیچ‌کدام از خریداران عمدهٔ کیف و کفش حاضر نیستند، کیف را به تنهایی بخرند و همهٔ آن‌ها کیف و کفش را با هم و با قیمتی که پیشنهاد می‌دهند، می‌خواهند! بله دردسر از همین‌جا شروع شده.

پدرم می‌گوید: برای تولید هر جفت کفش حداقل ۲ هزار تومان ضرر می‌دهد و برای تولید هر کیف ۴ هزار تومان سود می‌برد. با این حال برای اینکه تولیدی‌اش تعطیل نشود، قراردادی با یکی از خریداران بسته است؛ به این صورت که: او باید به‌طور میانگین حداقل روزی ۶۰ جفت کفش و ۴۸ کیف تولید کند. اما به دلیل مشکلاتی که در کارگاه تولیدی‌اش دارد، مثل تعداد کم دستگاه و نیروی کار، میانگین ظرفیت تولید او بیشتر از ۱۲۰ کفش و ۱۰۲ کیف، در روزهای کاری‌اش نمی‌تواند باشد. از طرف دیگر طبق قراردادش با بخش باربری، باید حداقل روزی ۱۲۰ کیف و کفش بارگیری کند.

بله! حالا مسئله این است که پدرم با این شرایط و با توجه به ضرر تولید کفش و سود تولید کیف، روزانه چقدر تولید کند تا درآمدش را بالا ببرد. این مشکلی است که با ریاضیات حل می‌شود. از من خواست تا کمکش کنم. من که خودم قادر به حل این مشکل نبودم، تصمیم گرفتم موضوع را با معلم ریاضی‌مان، آقای **آشفته** مطرح کنم.

فردای آن روز موضوع را عیناً برای آقای آشفته توضیح دادم. او با خوش‌حالی گفت که به پدرت بگو نگران نباشد. مشکل به آسانی قابل حل است. بعدازظهر آن روز همراه آقای آشفته به کارگاه پدرم رفتیم که نزدیک مدرسه بود. پدرم با آقای آشفته آشنا شد و بار دیگر مشکل را بیان کرد. بعد از شنیدن صحبت‌های پدرم، آقا رو به من کرد و با لبخندی گفت: «خوش‌حال باش پسرم، مسئلهٔ پدرت را به آسانی حل می‌کنیم.» بعد اشاره کرد، بیا با هم این مسئله را حل کنیم و به این صورت شروع به حل مسئله کردیم. در اولین مرحله برای حل مسئله، آقای آشفته تعداد کفش‌ها را x و تعداد کیف‌ها را y فرض کرد. بعد مشکل تولید را به شکل و زبان ریاضی به‌صورت زیر نوشتیم:

الف) تولید حداقل ۶۰ جفت کفش و ۴۸ کیف در روز:

$y \geq ۴۸ \ , \ x \geq ۶۰$

ب) در روز بیشتر از ۱۲۰ کفش و ۱۰۲ کیف نمی‌توان تولید کرد:

$y \leq ۱۰۲ \ , \ x \leq ۱۲۰$

ج) روزانه باید حداقل ۱۲۰ کفش و کیف بارگیری کرد:

$x+y \geq ۱۲۰$,

د) تولید هر جفت کفش ۲ هزار تومان ضرر و تولید هر کیف ۴ هزار تومان سود دارد.

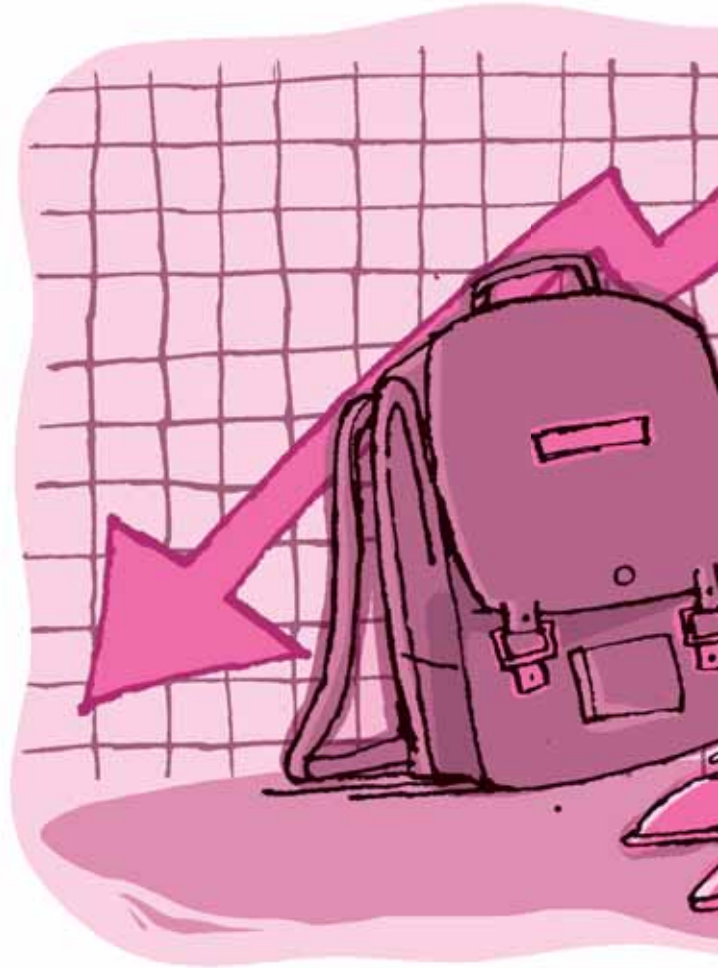
$R=-۲x+۴y$ (درآمد)

در گام بعدی، یکی‌یکی شرایط تولید را روی محور مختصات رسم کردیم.

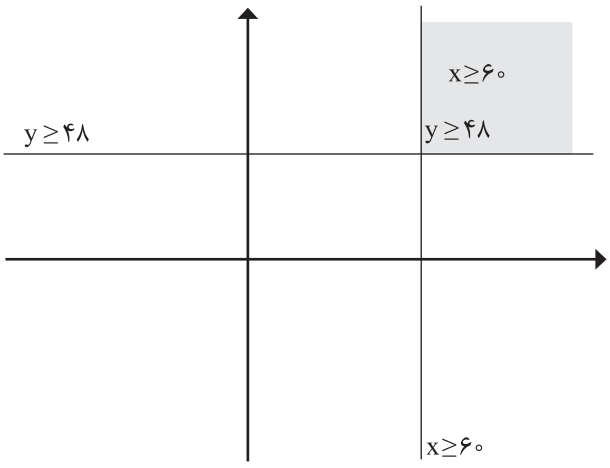
رسم شرایط الف

تولید حداقل ۶۰ جفت کفش و ۴۸ کیف در روز:

قسمت هاشورخورده ترکیب یا اشتراک $x \geq ۶۰$ و $y \geq ۴۸$ است. این اشتراک ناحیه‌ای است که شرایط $x \geq ۶۰$ و $y \geq ۴۸$ را دارد.

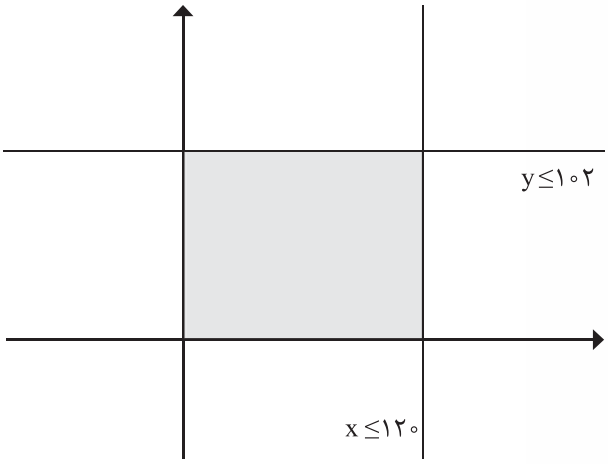


در ایـــن ناحیه نقاط آن هم بـــرای $x\geq ۶۰$ و هم برای $y\geq ۴۸$ موجه و درست است. در واقع جواب مشترک $x\geq ۶۰$ و $y\geq ۴۸$ است.



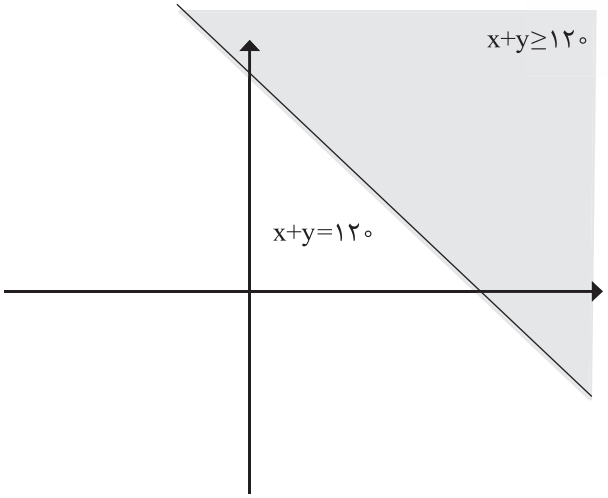
رسم شرایط ب

در روز بیشـــتر از ۱۲۰ کفش و ۱۰۲ کیف نمی‌توان تولید کرد: قسمت هاشورخورده اشتراک یا ترکیب $x\leq ۱۲۰$ و $y\leq ۱۰۲$ را نشان می‌دهد. همچنین این ناحیه‌ای است که مجموعهٔ نقاط در این ناحیه برای $x\leq ۱۲۰$ و $y\leq ۱۰۲$ موجه و قابل قبول و جواب مشـــترک هر دو است.



رسم شرایط ج

روزانه بایـــد حداقل ۱۲۰ کفش و کیف بارگیری کرد. قســـمت هاشورخورده $x+y\geq ۱۲۰$ است.



و جمع همهٔ شـــرایط، قسمت هاشـــورخوردهٔ اشتراک یا ترکیب مجموع شـــرایط الف، ب، ج اســـت. این ناحیه ناحیهٔ جواب اســـت و بهترین جواب یکی از رأس‌های این ناحیه نقاط A، B، C و یا D و E است که با امتحان این نقاط در R به‌دست می‌آید.

از آقای آشفته پرسیدم که: چرا نقاط رأسی بهترین نقاط است؟

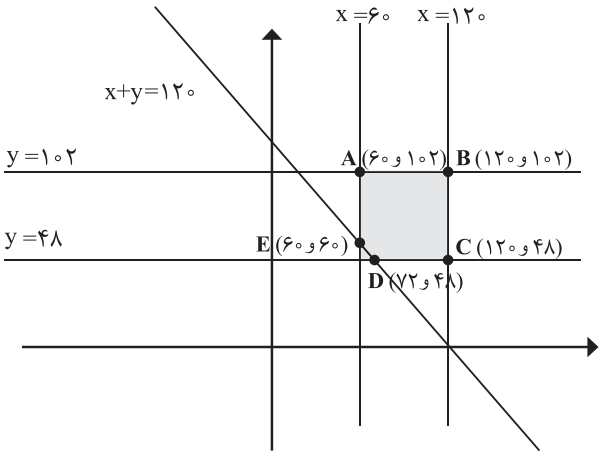
آقا گفت: «برای اینکه بیشـــترین و کمترین نقاط در گوشـــه‌ها هستند.»

البته این پاسخ مربوط به شـــاخه‌ای از ریاضیات به نام «تحقیق در عملیات»* اســـت. که تحقیق در عملیات به‌صورت قضیه‌ای ثابت

می‌کند که چرا یکی از نقاط رأس بهترین جواب است.

ناحیهٔ جواب ناحیه‌ای است که تمام شرایط مسئله در آن ناحیه وجود دارد. در واقع اشتراکی از تمام شرایط است و تمام نقاط موجود در این ناحیه در شرایط $x\geq ۶۰$، $y\geq ۴۸$، $x\leq ۱۲۰$، $y\leq ۱۰۲$ و $x+y\geq ۱۲۰$ موجه و صادق است.

یکی از رأس‌های A، B، C، D و E بهترین نقطه برای R و تولید است که با قرار دادن مشخصات آن در R پیدا می‌شود.



می‌دانیم که تولید هر جفت کفش دو هزار تومان ضرر و تولید هر کیف چهار هزار تومان سود دارد؛ یعنی $R=-۲x+۴y$. اکنون با قرار دادن نقاط A، B، C، D و E در $R=-۲x+۴y$، مقدار R به ازای هر پنج نقطه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

(۱) $A(۶۰, ۱۰۲) \Rightarrow R=(-۲\times ۶۰)+(۴\times ۱۰۲)=۲۸۸$

(۲) $B(۱۲۰, ۱۰۲) \Rightarrow R=(-۲\times ۱۲۰)+(۴\times ۱۰۲)=۱۶۸$

(۳) $C(۱۲۰, ۴۸) \Rightarrow R=(-۲\times ۱۲۰)+(۴\times ۴۸)=-۴۸$

(۴) $D(۷۲, ۴۸) \Rightarrow R=(-۲\times ۷۲)+(۴\times ۴۸)=۴۸$

(۵) $E(۶۰, ۶۰) \Rightarrow R=(-۲\times ۶۰)+(۴\times ۱۰۲)=۱۲۰$

از مقایسهٔ این پنج مقدار محاسبه شده برای R، بهترین نقطه برای تولید به‌دست می‌آید که نقطهٔ $A(۶۰, ۱۰۲)$ است؛ چرا که بیشترین سود را دارد. بنابراین مشکل پدرم حل شد و بهترین تولیدش، تولید روزی ۶۰ جفت کفش و ۱۰۲ کیف مدرسه است.

***پی‌نوشت**

* **تحقیق در عملیات:** یا پژوهش عملیاتی یکی از زیرشاخه‌های ریاضیات کاربردی است که برای پیدا کردن نقطهٔ بهینه (بهترین نقطه) در مسائل بهینه‌سازی کاربرد دارد. پیدا کردن نقطهٔ بهینه براساس نوع مسئله مفاهیم متفاوتی دارد و در تصمیم‌سازی از آن استفاده می‌شود.

از تحقیق در عملیات در بیشینه‌سازی سود، سرعت خط تولید و... و کمینه‌سازی، هزینه، ریسک و... استفاده می‌شود. روش اصلی تحقیق در عملیات پیدا کردن بهترین پاسخ برای مسائل پیچیده‌ای است که به زبان ریاضی مدل‌سازی شده‌اند و سبب بهبود یک فرایند می‌شوند.

تاریخچهٔ تحقیق در عملیات

اولین استفاده از تحقیق در عملیات در جنگ جهانی دوم به سال ۱۹۴۱ در انگلستان صورت گرفت. مدیریت نظامی انگلستان در آن زمان، گروهی از دانشمندان را که با مسائل تاکتیکی دفاع هوایی و زمینی سروکار داشتند، مأمور تحقیقاتی در این زمینه کرد. دلیل اصلی انجام این تحقیق محدودیت بودجهٔ نظامی بود. برای همین لازم بود که چگونگی استفادهٔ مناسب و حداکثر از منابع نظامی مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد. همان‌طور که از نام تحقیق در عملیات مشخص است، علت به‌کارگیری آن، ماهیت مطالعات تیمی بود که روی عملیات (نظامی) تحقیق می‌کرد.

دانشمندان انگلیسی رادار را اختراع کردند، اما ارتش با استفادهٔ بهینه از این وسیله آشنا نبود. برای همین با گردهمایی جمعی از دانشمندان و با به‌کارگیری تکنیک‌های مؤثر ریاضی و داده‌های اطلاعاتی، توان دفاعی انگلستان تا حد ۱۰ برابر افزایش یافت. موفقیت این گروه انگیزهٔ استفاده از گروه‌های مشابه را در بررسی مسائل متفاوت نظامی بیشتر کرد. نتایج ارزشمند حاصل از تحقیق در عملیات توسط تیم انگلیسی به سرعت مدیریت نظامی ایالات متحده را به فعالیت‌هایی در این زمینه علاقه‌مند کرد. نوآوری‌های موفقیت‌آمیز توسط تیم‌های آمریکایی، شامل توسعهٔ الگوهای جدید پرواز، برنامه‌ریزی در مین‌گذاری دریا و بهره‌گیری مؤثر از تجهیزات الکترونیکی می‌شد.

در این زمینه، گروه‌های تحقیق در عملیات مشابهی در دیگر کشورها از جمله کانادا و فرانسه مشغول فعالیت شدند. این گروه‌ها که معمولاً برای اجرای عملیات تعیین می‌شدند، در انگلستان به نام تحقیق در عملیات شناخته شدند و نیز گاهی در آمریکا با نام‌های دیگر، نظیر تحلیل عملیات، ارزیابی عملیات، تحقیق در عملیات، تحلیل سیستم‌ها، ارزیابی سیستم‌ها و تحقیق در سیستم‌ها به‌کار برده می‌شدند.

بررسی مسئلهٔ حملهٔ هواپیما به زیردریایی‌های آلمانی از موارد دیگری بود که دانشمندان ریاضی به آن پرداختند. در اوایل جنگ جهانی دوم، نیروی هوایی انگلستان از بمب‌های معمولی علیه زیردریایی‌های آلمانی استفاده می‌کرد. این نحوه حمله تنها در صورتی مؤثر بود که زیردریایی‌ها مستقیماً مورد اصابت بمب قرار می‌گرفتند. زیرا انفجار در سطح آب بود و نمی‌توانست به بدنهٔ زیردریایی‌ها آسیب بزند؛ مگر اینکه بمب به عرشه اصابت می‌کرد. برای تخریب بیشتر زیردریایی‌هایی که به زیر آب فرو رفته بودند، انفجار در عمق مورد استفادهٔ هواپیما قرار می‌گرفت، ولی برای تعیین عمق مناسب انفجار، اختلاف‌نظر وجود داشت. بعضی جنگنده‌ها بمب‌های خود را برای انفجار در عمق ۱۵۰ فوت تنظیم می‌کردند، چون فکر می‌کردند این مقدار، حداکثر عمقی است که زیردریایی مورد حمله ممکن است فرو برود. اما جنگنده‌های دیگر ۵۰ فوت را برای تنظیم انتخاب کردند، چون زیردریایی‌ها در عمق ۱۵۰ فوت دیگر دیده نمی‌شوند و در نتیجه مورد حمله قرار نمی‌گیرند. لذا بین گروه طرف‌داران تنظیم عمق و سطح انفجار اختلاف‌نظر وجود داشت و... .